www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

eme groupe iecs

CONCOURS 1989

MATHEMATIQUES

Régime général

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 6

– Problème 1 –

On note $M_4(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels, $\mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $M_4(\mathbf{R})$ formé des matrices inversibles et I la matrice unité d'ordre 4.

On rappelle que l'usage des déterminants est hors-programme.

– I –

Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice inverse de A_1. On justifiera l'existence de cette inverse. (Ce calcul étant utilisé par la suite, il est à effectuer soigneusement).

2) Soit OL_4 l'ensemble des opérations élémentaires sur les lignes des matrices de $M_4(\mathbf{R})$. On rappelle que OL_4 est formé des opérations du type :

$$L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j \quad (\alpha \in \mathbf{R}), \quad L_i \longleftarrow \alpha L_i \quad (\alpha \in \mathbf{R}^*), \quad L_i \longleftrightarrow L_j.$$

Montrer que toute opération r de OL_4 admet une inverse dans OL_4 pour la composition des opérations (c'est-à-dire qu'il existe r' de OL_4 telle que : $\forall\, M \in M_4(\mathbf{R}), (r \circ r')(M) = (r' \circ r)(M) = M$). On notera r^{-1} cette inverse.

3) a) Soit r un élément de OL_4 et M une matrice de $\mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$. Montrer que $r(M)$ appartient à $\mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$ et que $[r(M)]^{-1} = M^{-1}r^{-1}(I)$.

b) En déduire l'inverse de la matrice A_2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit L la matrice ligne $L = (l_1, l_2, l_3, l_4)$ et C la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$; $l_1, l_2, l_3, l_4, c_1, c_2, c_3, c_4$ étant huit réels quelconques.

On supposera L et C toutes deux non nulles.

1) Quelles sont les dimensions de la matrice LC ? De la matrice CL ? On identifiera dans la suite LC à un réel.

2) a) Montrer que si $LC = -1$, la matrice $I + CL$ n'est pas inversible. (On pourra calculer $(I + CL)C$).

b) Montrer que si $LC + 1 \neq 0$, alors $I + CL$ est inversible et il existe un réel k tel que $(I + CL)^{-1} = I + kCL$.

3) Soit M une matrice de $\mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$ et $N = M + CL$.
En remarquant que $N = M(I + M^{-1}CL)$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel $LM^{-1}C$ pour que N soit inversible et montrer que, sous cette condition, $N^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{1+LM^{-1}C} M^{-1}CLM^{-1}$.

4) Applications :

a) Soit $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A_3 - A_1$ peut s'écrire simplement sous la forme CL ; en déduire que A_3 est inversible et calculer A_3^{-1}.

b) A quelle condition sur (a, b) la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & a & b & 1 \end{pmatrix}$ est-elle non inversible ?

– Problème 2 –

On note E l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies et dérivables sur $\mathbf{R}$, à dérivées continues sur $\mathbf{R}$, et telles que $f(0) = f(1) = 0$.

Dans tout le problème, f désigne une fonction de E.

1) Donner un équivalent de la fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{\sin \pi t}$.

a) en $t_0 = 0$

b) en $t_0 = 1$.

2) a) Montrer que l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} f(t) f'(t) dt$ converge.

b) A l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera soigneusement, montrer que $I(f) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f^2(t) \frac{1}{\sin^2 \pi t} dt$ (où $f^2(t)$ désigne $[f(t)]^2$).

3) En considérant $S(f) = \int_0^1 (\pi \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} f(t) - f'(t))^2 dt$, montrer l'inégalité

$$(i) \qquad \int_0^1 f'^2(t) dt \geq \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt.$$

4) a) Montrer que le cas d'égalité dans l'inégalité (i) est obtenu si, et seulement si : $\forall\, t \in [0,1] \quad \pi(\cos \pi t) f(t) = f'(t) \sin \pi t$.

b) En déduire l'ensemble des fonctions de E qui réalisent le cas d'égalité dans (i). On pourra utiliser la fonction auxiliaire définie sur $]0,1[$ par $\lambda(t) = \frac{f(t)}{\sin \pi t}$. (On n'indiquera, bien sûr, que les valeurs de f sur $[0,1]$).

* lire $S(f) = \int_0^1 \left(\pi \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} f(t) - f'(t) \right)^2 dt$

– Exercice –

On suppose que la variable aléatoire N_t $(t > 0)$, désignant le nombre de voitures arrivant au péage d'une autoroute pendant un intervalle de temps de longueur t, suit une loi de Poisson de paramètre $l = \lambda t$, λ étant un nombre strictement positif. On suppose que la loi de N_t ne dépend que de la longueur t et non des instants de début et de fin de l'intervalle.

On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante : on considère un instant déterminé, choisi comme origine des temps; Y est le premier instant strictement positif où arrive une voiture au péage.

a) Donner la formule de la probabilité de l'événement $\{N_t = k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

b) Préciser l'espérance et la variance de la variable aléatoire N_t.

c) On veut déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

i) Quelle est la signification de l'événement $\{Y > y\}$, $y > 0$?

ii) Calculer la probabilité $P\{Y > y\}$. En déduire la fonction de répartition $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$.

iii) Déterminer une fonction densité $f(y)$ de la loi de probabilité de Y.

d) Calculer l'espérance mathématique de Y.

* * * * * *

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail